**1 Интерполяционный полином Лагранжа**

Построим многочлен такой, что

Будем строить, используя базисные ф-ции Лагранжа, обозначаем их , они обладают св-вом

=

можно представить в виде произведения

– полином n-ой степени, который проходит через точки (,

Пусть , тогда и

Очевидно, что погрешность можно представить как , -некоторая ф-ция

Для произвольной точки

Введём ф-цию . Если то в силу того, что – полином, степень которого , .

Поскольку Ф*(x)* обращается в ноль n+2 раза в узлах (), то по Т.Ролля обращается в ноль по крайней мере n+1 раз в интервале, который содержит . Продолжая применять Т. Ролля, находим, что обращается в ноль по крайней мере один раз. Таким образом, в интервале значений такая точка , что производная .

*–* представление погрешности интерп. в т. X

Замечание: Погрешность не обязаетльно убывает с ростом n

**2 Оценка погрешности интерполяционного полинома на равномерной сетке.**

*Лемма:*

На равномерной сетке узлов выполн. оценка (1)

Д-во: Зафиксируем точку x и найдём номер узла j такого, что . (2)

Используя ф-лу (2), находим (3)

Оценку (3) буде усиливать: (4)

Т.к. сетка равномерная, то , . Подставим эти ф-лы в (4)

(6), поскольку (7) Ч.Т.Д.

*Теорема:*

Пусть , |. Если – интерполяционный полином степени , построенный на равномерной сетке узлов, оценка погрешности имеет вид:

Д-во: следует из формулы и доказанной леммы.

**3. Разделенные разности (РР) и их свойства.**

Опр. Разделённые разности нулевого порядка совпадают со значением ф-ции

РР 1-го порядка будем записывать как (1)

РР 2-го порядка будем записывать как (2)

РР k-ого порядка аналогичным образом определяются через разделённые разности k-1-ого порядка:

(3)

*Лемма*: Разделённую разность можно представить в виде суммы (4)

*Следствие 1:* Значение не зависит от упорядоч. узлов сетки

*Следствие 2:* Разность = ,

Д-во: =, ч.т.д.

*Следствие 3:* РР , *min*{

*Следствие 4:* РР явл-ся линейным оператором

Таблица разделённой разности

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | f(;  f(;  f(; | f(;  f(; | f(; |

**4. Интерполяционная формула Ньютона**

Пусть проходит через (), i=, т.е. он интер-ый степени ≤n.

Можем представить в виде **(1)**.

(1) ⇒, i= **(3)**.

проходит через все т. (), i=. ⇒ **(4)** ⇒ =,i=. Продолжая по алгоритму, получаем **(6)** – ф-ла Ньютона представления интерполяционного полинома через разделенные разности. Погрешность: f(x)-=. В (6) порядок узлов не важен, поэтому роль может играть точка, например: **(7)**.

Если сетка упорядочена по возрастанию, то (6)-ф-ла Ньютона для начала таблицы, (7)-для конца.

**5. Конечные разности и их свойства**

**Опр.** Разностный оператор ставит в соответствие функции Y(x) функцию **(1)**

Разностный оператор линейный, т.е. **(2)**

**(3)**

- Разность второго порядка, разности более высоких порядков определяются аналогичным образом

Конечн.разности удобно представлять в виде таблицы, основанной на фор-ле: **(4)**

Альтернативой явл-ся аналит.подход, основанный на разностной формуле Лагранжа: **(5)**

Конечная разность произвед.: (f(x)g(x))=f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)=f(x+h)g(x+h)-f(x+h)g(x)+f(x+h)g(x)-f(x)g(x)=f(x+h)(g(x+h)-g(x))+g(x)(f(x+h)-f(x))=f(x+h)g(x) +g(x)f(x) **(6)**

Или (f(x)g(x))= g(x+h)f(x)+f(x)g(x) **(7)**

= - = **(8)**

**Л.** Если deg(f(x))=n, то deg(f(x))=n-1

●Пусть

**(9)**

Т.е.deg()=n-1∎

**Т.** Если **(10)**, то

**(11)**

●Применим к (10) Лемму n раз.∎

**6. Минимизация остатка интерполирования**

-многочлены Чебышева

Или

**Л.** многочлена степени n со старшим коэфф.=1 выполн.условие: **(1)**

●От противного. Пусть Тогда deg()=n-1 и sgn()=sgn()=, т.к. , где - корни , m=. Т.е. многочлен степени n-1 на отрезке [-1,1] меняет знак n+1 раз, т.е. имеет n корней – противоречие!!∎

В случае отрезка [a,b] делаем замену **(2).**

Тогда **(3)**.

По доказанному ранее **(4)**.

Рав-во в (4) дост-ся на приведенном мног-не Чебыш. **(5)** – многочлен, наименее уклоняющ. от 0 на [a,b] со старш коэфф =1.

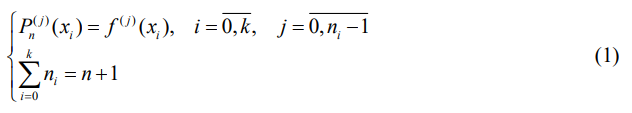
Корни : , m= **(6)**

Для оценки остатка интерпол-ия ф-ции f(x) на сетке узлов {} будем испол-ть равномерн норму .

Из представления остатка следует **(7)**. =(x-)…(x-). Будем минимизировать правую часть (7). deg()=n,поэтому если в кач-ве узлов интерпол-ия взять корни мног-на Чебыш.,то =**(8).** , поэтому на чебышевском наборе узлов оценка погр-ти интер-ия . Это неулучшаемая оценка погрешности интерполирования.

**7.Интерполирование с кратными узлами.**

Пусть – сетка узлов интерполяции, среди которых нет совпадающих, и пусть в этих узлах заданы значения функции и ее производных до включительно, где – кратность i-го узла. Требуется найти многочлен наименьшей степени n такой, что



Если , то узел – простой; если , то узел кратности (кратный).

**Теорема 1:** Задача (1) имеет единственное решение.

Д-во: Очевидно, что система (1.1) относительно является линейной алгебраической порядка n + 1.

Чтобы доказать, что СЛАУ имеет единственное решение, достаточно убедиться, что однородная СЛАУ имеет только нулевое решение.

Пусть . Тогда однородная СЛАУ имеет вид:

Покажем, что из этого следует, что при всех i.

Пусть, от противного, тогда каждый узел является корнем полинома ( кратности , т.е. справедливо

представление , значит полином кратности n имеет n + 1 действительных корней – противоречие. Значит теорема доказана.

Многочлен, удовлетворяющий условиям (1), называют интерполяционным многочленом Эрмита.

Рассмотрим погрешность интерполяции

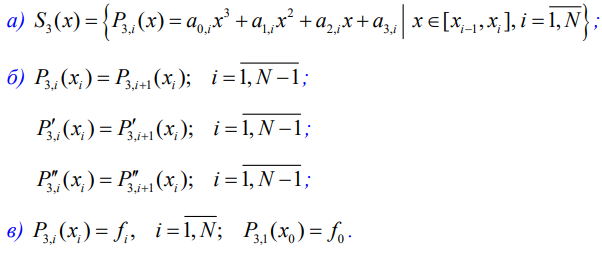
**Теорема 2:** Существует точка , где

Введем функцию с кратностями и 1 соотвественно. Сумма кратностей тогда не менее n+2. Тогда F'(z) по т. Ролля на каждом отрезке между соседними узлами имеет не менее одного корня(k корней). Также производная имеет корни c кратностями (n + 1 – k в сумме). Получаем, что сумма кратностей корней производной n + 1. Аналогично рассмматриваем производные более высоких порядков. Тогда для .

**8. Интерполяционный кубический сплайн.**

Пусть– сетка узлов интерполяции; f(x) – интерполируемая функция, заданная в этих узлах.

Кубический интерполяционный сплайн определяется условиями:

****

Неизвестных здесь 4N , условий а), б), в) 4N - 2. Не хватает 2 условий для

замыкания СЛАУ. Их обычно накладывают на концах отрезка [a, b] , исходя из наличия или отсутствия

дополнительной информации о функции f(x) в точках a и b .

Если известны первые производные, то



Вторые

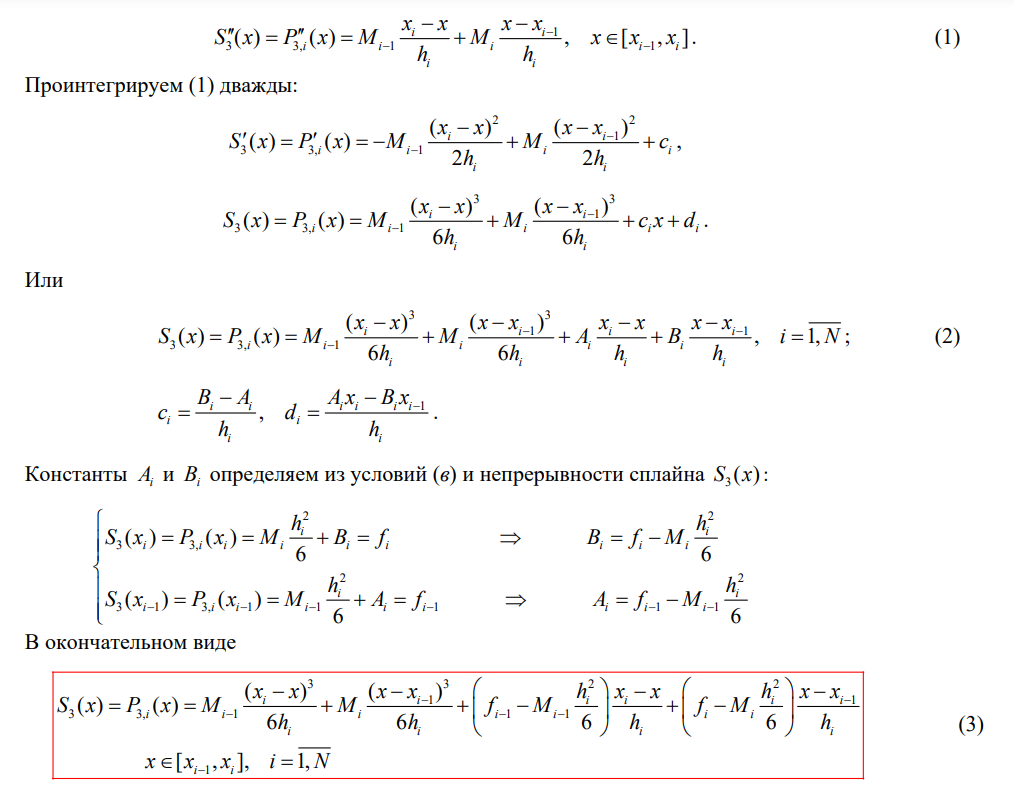


Ничего не известно



Преобразуем задачу к более простому виду. Для этого введем обозначения .

Так как функция непрерывна на [a,b] и линейна на каждом элементе , то при можно записать



Таким образом, мы привели сплайн к виду (3), где неизвестными являются Mi , которых столько

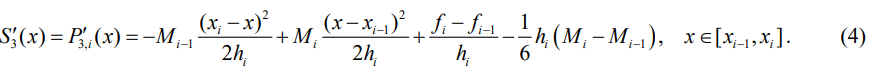
же, сколько узлов, т.е. N+1. Это значит, что число неизвестных, определяющих кубический сплайн

сократилось в 4 раза. Чтобы привести сплайн к виду (3), мы использовали условия

непрерывности и а также условие (в). Осталось неиспользованным условие

непрерывности с помощью которого построим СЛАУ для неизвестных

Имеем



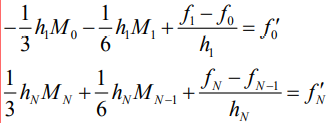
Условие непрерывности во внутренних узлах



Имеем СЛАУ (5) из N -1 уравнений для N+1 неизвестных Mi . Остальные 2 уравнения получим из

условий (г).

В случае условий (г-1)



(г-2): (г-3): (6)

Получили СЛАУ (5), (6) из N+1 уравнений с трехдиагональной матрицей для неизвестных . Для ее решения удобно применять метод прогонки, который в данном случае применим и абсолютно устойчив. Найдя мы можем записать искомый кубический сплайн на каждом отрезке в виде (3).

**9. Наилучшие приближения в линейном нормированном пространстве**

Пусть – линейное нормированное пространство. Требуется найти элемент наилучшего приближения с помощью линейной комбинации , и – линейно независимы. Т.е. требуется найти элемент такой, что .

Если существует такой элемент , то он называется элементом наилучшего приближения (ЭНП).

***Теорема.*** ЭНП в линейном нормированном пространстве существует.

*Доказательство*.

.

является непрерывной функцией

– Евклидова норма

непрерывна на сфере и в некоторой ее точке () достигает свою нижнюю грань .

– линейно зависимые, получаем противоречие.

Выберем . непрерывна в шаре и в некоторой его точке достигает нижнюю грань . . Точка . Вне шара: . .

*Замечание*: ЭНП может быть не единственным.

*–* линейно нормированное пространство называется строго нормированным, если из , следует: , .

***Теорема.*** Если – строго нормированное, то существует единственный ЭНП.

*Доказательство.* От противного.

Существует ,

*.* Очевидно, , т.к. иначе (противоречит нашему предположению)

,

. При : , т.е. – линейная комбинация , т.е. . При :

**10. Наилучшее приближение в гильбертовом пространстве**

Пусть – гильбертово пространство. Для элемент наилучшего приближения (ЭНП) единственен и его построение сводится к решению системы линейных уравнений. – линейно независимая система

***Лемма 1.***  *–* ЭНП. Тогда ортогональна всем элементам .

*Доказательство.* От противного.

Существует : (. .

Рассмотрим .

(

. Получили противоречие

***Лемма 2.*** ( . Тогда – ЭНП.

*Доказательство.*

. Из ***леммы 1*** следует:

.

*Замечание 1:* Если элементы ортонормированные . Тогда . – отрезок ряда Фурье, – коэффициенты Фурье

*Замечание 2: –*ЭНП

*Замечание 3:* Типичный пример гильбертова пространства это

*Замечание 4:* Коэффициенты Фурье дают наилучшее среднеквадратичное приближение*.*

**11. Интерполяционные квадратурные формулы.**  
Рассмотрим квадратурные формулы, основанные на алгебраическом интерполировании функции  
Узлы считаем заданными

Отбрасывая второй интеграл в (2), получаем квадратурную формулу интерполяционного типа

Для того чтобы квадратурная формула (3), построенная на n + 1 несовпадающих была интерполяционной, необходимо и достаточно, чтобы она была точной на полиномах степени n (замечание при этом квадратурная формула может быть точной для полинома степени выше n).

Доказательство:

Необходимость очевидна.

Интерполяционная квадратурная формула, построенная на n + 1 различных узлах будет точной для полиномов степени n, когда подынтегральная функция заменяется равным ей интерполянтом.  
Достаточность:

Если квадратурная формула (3) точна для любого полинома, степени не выше n, то её весовые коэффициенты находятся по формуле (4), т. е. она является формулой интерполяционного типа.

Рассмотрим базисные функции Лагранжа

C учетом этого находим

т. е. формула (4) является справедливой

Погрешность квадратурной формулы

Тогда

Если гладкая, то

Если мы знаем оценку

то

**12. Квадратурные формулы прямоугольников и трапеций.**

Берем равномерную сетку узлов

Если для интеграла в правой части построить квадратурную формулу, то получим составную квадратурную формулу

1. Формула средних прямоугольников

Погрешность

Оценим погрешность с помощью формулы Тейлора

Используя (5) и (4), находим

Введем обозначение:

Тогда

Составная квадратурная формула

Найдем погрешность

Очевидно, что она равна сумме погрешностей простой формулы (8)

Тогда

Таким образом, погрешность составной формулы на [a, b] есть

Формула имеет второй порядок точности

1. Формула трапеций

Погрешность интерполяции

Полученная оценка (16) является не улучшаемой, равенство в (16) достигается, если

Составная формула:

**13. Квадратурная формула Симпсона.**

Формула Симпсона

Для оценки погрешности построим интерполяционный полином Эрмита 3-ей степени, который удовлетворяет условиям:

Из (25) и (26) следует:

**14. Критерий квадратурных формул НАСТ.**

Если в квадратурной формуле интерполяционного типа использовать n узлов, то она будет точна для многочленов степени n – 1.

Оказывается, что за счёт выбора узлов сетки можно построить квадратурные формулы, которые будут точны для степени <2n -1

Потребуем, чтобы эта формула была точна для любого полинома степени m, т. е.

Получим систему относительно

Можно показать, что это система при m = 2n -1 имеет единственное решение

Cформулируем критерий квадратурных формул НАСТ

Теорема

Квадратурная формула (1) точна для любого полинома степени 2n-1 когда выполняются условия:

1. ортогонален с весом любому полиному q(x) степени < n
2. Формула (1) является формулой интерполяции типа, т.е.

Необходимость:

Пусть формула (1) точна для любого многочлена степени m=2n-1. Это значит, что она точна и для w(x)q(x), степень которого <=2n-1. Условие (6) выполняется также в силу критерия интерполяционной формулы.

Достаточность:

Пусть функция f(x) – полином степени 2n-1

Согласно теореме

(r(x) является полиномом степени не выше n-1)

тогда находим

Т. к. r(x) - полином степени не выше n-1 и квадратурная формула (1) является формулой интерполяционного типа, то она точна для r(x), т. е.

Таким образом, , т. е. формула (1) точна для любого полинома степени 2n-1.

Замечание 1

Теорема упрощает построение формулы Гаусса

Эта формула представляет собой систему из n уравнений относительно

Таким образом, для построения квадратурной формулы Гаусса нужно найти узлы из системы (10), затем коэффициенты по формуле (6)

Замечание 2

Теорема не гарантирует и ! решения системы (10). Докажем и ! квадратурных формул Гаусса. Для этого докажем и ! многочлена w(x) степени n, ортогонального всем полиномам меньшей степени, корни которого

Представим полином w(x) в виде разложения по базису

тогда из (10) имеем

(12)

(12) –– система из n уравнений относительно неизвестных переменных

Умножим на и проведём

Или

Поэтому (14) равенство может = 0, если все , т. е. система (12) имеет единственное решение => полином w(x) степени m ортогональный с весом p(x) любому многочлену меньшей степени.

**15 Существование и единственность квадратурных формул НАСТ**

Теорема: Если ортогональный с весом всякому многочлену . Док-во:

Вместо будем брать базисные функции

(1)-неоднородная СЛАУ. Неодн СЛАУ имеет ! решение ⬄ однородную СЛАУ имеет только нулевое решение. Строим ещё одну СЛАУ, похожую на (1), где . СЛАУ (2) – однор, соответсвует системе (1) и имеет ! решение (нулевое) :

**16 Свойства КФ НАСТ**

1.

Р!

2.

3. Если

**17.Квадратурные формулы с равными коэффициентами**

(1)

За счёт выбора параметров c, x, …, можно повысить АСТ до n.

Возьмём f(x) = 1, подставим в формулу и потребуем выполнить равенства

(2)

Для определения можно потребовать выполнение строгого равенства, когда f = x, получаем систему линейных уравнений

(3)

Построим многочлен степени n, для которого узлы КФ будут корнями, т.е. (4)

Этот полином можно представить как

(5)

(см. (4))

Коэффициенты являются известными симметричными функциями корней

Введем обозначение (6)

Докажем равенство, которое часто называется соотношением Ньютона

Запишем (8)

Очевидно, что отношение

Тогда соотношение для производной можно представить в виде

(10)

Из равенства коэффициентов при одинаковых степенях x следует соотношение (7)

Последнее уравнение системы (7) находим из сложения

(11)

Суммируя (11), получаем последнее уравнение (7)

(12)

(3) => (13)

Находим , затем многочлен по (5), далее приравниваем к 0 и находим . Эти корни и будут узлами квадратурной формулы Чебышева. Узлы должны быть различными действительными числами, принадлежащими [a, b]

Рассмотрим случай, когда . Если в качестве узлов квадратичной формулы взять корни ортогонального многочлена Чебышева, то мы получим, с одной стороны, формулу Чебышева (18), в результате получим

(19)

Формула (19) имеет НАСТ = 2n-1

Покажем, что (19) точка для всех полиномов Чебышева

, т.к. многочлены ортогональны

Поскольку квадратурная сумма точна для всех компонентов Чебышева , степени m <2n, полиномы Чебышева ортогональны => квадратурная формула точна для всех компонентов степени m <2n.

**18. Методы Эйлера, Трапеций и Средней точки**

(1) Задача Коши

(2)

Используя для вычисления интеграла формулу левых прямоугольников, получим

Если в (3) отбросим погрешность получим (4) **Явный метод Эйлера**

Если для вычисления интеграла в формуле (2) применить формулу правых прямоугольников, то получим неявную формулу метода

(5) **Неявный метод Эйлера**

В общем случае неявный метод Эйлера представляет собой неявное уравнение относительно Для его решения можно использовать некоторый итерационный процесс, например, МПИ

Для сходимости итераций достаточно потребовать выполнения условий

(7)

или =

Локальная погрешность явного и неявного методов Эйлера O(h2):

Подставляем в (5) точное решение, находим погрешность

(8)

Явный метод Эйлера сложнее в реализации, но имеет значительное преимущество за счёт своей устойчивости, которая позволяет вести счёт с большим шагом.

Если для интеграла в (2) использовать формулу трапеций, то получим метод трапеций.

(9) **Метод трапеций**

Локальная погрешность: находится аналогично (8)

Если в формуле (2) для вычисления интеграла применим формулу средних прямоугольников, то получим формулу средней точки

(10) **Метод средней точки**

(11)

По “явному Эйлеру” (12)

Связка метода (10 - 11) образует неявную формулу (14)

**19. Сходимость метода Эйлера.**

1. Метод Эйлера h\*f(x\_i,y\_i) сходится в точке x\*, если |y\_i-U(x\_i)|-->0 при h0, x\_i=x\*
2. Метод сходится на отрезке[0,X] если он сходится в каждой его точке отрезка x[0,X]
3. Метод имеет p-й порядок точности, если существует такое целое p>0, что |y\_i-U(x\_i)|=O() при h0

И сеточная ф-я, называемая погрешностью метода:

Для этого подставим сеточную ф-ю в уравнение Эйлера, выразив ее предварительно через ф-ю погрешности

Преобразуем и получим: , i=0,1,2,…,n-1(3)

Пусть -невязка или погрешность аппроксимации разностного уравнения (1) для решения исходного дифф уравнения

Пусть

Перепишем правую часть (3):

*И метод Эйлера будет выглядеть так :*

**20. Методы Рунге-Кутта.**

Рассмотрим две различные схемы Рунге-Кутты предназначенные для численного решения обыкновеных дифф уравнений 1-го порядка и имеющие третий пор аппроксимации:

И две схемы Рунге-Кутты имеющие 4-ый порядок аппроксимации:

Метод Рунге-Кутты используют для расчета стандартных моделей тк он обладает точностью O^4(h) при небольшом обьеме вычислений.

Для построения разностной схемы интегрирования воспользуемся разложением ф-и:

в ряд Тейлора :

*Заменим 2 ю производную в этом разложении выражением*

*X\*=x\_k+delta\*x*

*Y\*=y\*(x\_k+delta\*x)*

*Причет подбирается из условий достижения макс точности выражения*

*Окончательно схема Рунге-Кутты принимает вид:*

*Та же схема в форме разностного аналога уравнения (1):*

*При а=0 получим как частный сучаай схему Эйлера*

**21. Устойчивость линейных многошаговых методов**

(1)

Будем рассматривать рамномерную сетку узлов

Будем рассматривать линейный и m-шаговый метод

(2)

Для того, чтобы использовать (2), нужно задать стартовые значения y0 находится из (1) : y0 = U0 . Остальные значения обычно находятся по методам Рунге-Кутта того же порядка точности, что формула 2

Запишем соотв. однородное уравнение для метода 2:

(3)

Будем искать решение для этого уравнения в , тогда

(4) – характеристическое уравнение

**Опр**. Линейный m-шаговый метод 2 удовл. условию корней, если все корни характ. ур-я 4 находятся внутри или на границе единичного круга комплексной плоскости, причем на границе нет кратных корней.

**Опр**. Разностное ур-е устойчиво по нач. данным, если существует постоянная M, которая не зависит от n такая, что для любых начальных данных выполняется оценка решения (5)

Таким образом, устойчивость означает равномерную по n ограниченность решения задачи Коши

**Теорема**. Условие корней необх. и дост. для устойчивости решения 3 по начальным данным

**Д-во**. Пусть характ. ур-е 4 имеет корень q такой, что |q|>1. Зададим нач. значение , j=0, …, m-1 , тогда однородное разностное ур-е 3 имеет вид , где , которое неогранич. возрастает с ростом n и оценка 5 не выполняется. Следовательно, условие является необходимым для устойчивости. Рассмотрим случай, когда ур-е 4 имеет корень q с кратностью r>1, причем |q|=1. В этом случае разностное ур-е будет иметь вид и оценка 5 не выполняется

**Замечание**. Можно показать, что если метод 3 устойчив по начальным данным, то для неоднородного ур-я (6) выполняется оценка (7)

Формула 7 означает устойчивость по начальным данным и по правой части

**22. Метод Ритца.**

*–* сепарабельное гильбертово пр-во с всюдуплоской обл. опред. .

**Опр.** Оператор А наз. симметрическим, если (2)

**Опр.** Оператор А наз. положительным А>0, если (3)

**Опр.** Симметрический оператор А назыв. положит. опеделенным E, если (4)

Свяжем с ур-ем 1 квадратичный функционал (5)

**Теорема 1.** Если оператор А>0, то ур-е 1 может иметь не более одного решения при любом

**Док-во.** Будем полагать, что , при этом . Тогда

?!

**Теорема 2.** Пусть А>0 и ур-е 1 имеет единств. решение, тогда функционал энергии F(u) принимает на мин. значение в области . Если минимум F(U) достигается на некот. , то этот эл-т является решением 1.

Из теоремы 2 следует, что задачу нахождения из 1 можно заменить равносильной задачей о нахожд. точки минимума функционала энергии F(U). Такая задача наз. вариационной.

Определим на DA новое скал. произв. (6)

Введем на DA энерг. норму по скал. произв. 6 (7), тогда DA станет гильбертовым пр-вом, возможно, неполным. Пополним DA по норме 7, т.е. присоединим к DA те элементы, для которых новая норма конечна. Это пополнение будем обзн. НA и наз. энергет. пр-вом оператора А

**Замечание.** Функционал энергии можно расширить с DA на НA так, что на этом мн-ве функционал F(u) обяз. имеет минимум в нек. точке U0 , тогда этот эл-т называют обобщенным решением ур-я 1

**Замечание.** Обобщ. решение вариац. задачи F(u)=min может быть представлено рядом Фурье в эренг. пр-ве НA , т.е. (8)

По полной ортонорм. сисиеме этот ряд сходится к U0 в НА, след-но, в H

В методе Ритца приближ. решение вар. задачи F(u) = min ищется в подпр-ве, натянутом на мн-во координатных ф-ций , т.е.

Св-ва:

1) лин. независимы

2) Система коорд. ф-ций gполна в НА

=>

**23. Основные понятия теории разностных схем**  
*Определение.* Сеточные (разностные) методы основаны на переходе от функций непрерывного аргумента к функциям дискретного аргумента, например, на отрезке *[0, l]* вводятся узлы

множество узлов, в которых будем определять приближенное решение, шаг сетки.

значения в узлах .

Для нахождения сеточной функции формулируется разностная задача. Запишем дифференциальную задачу в операторной форме: . (1)

*F –* входные данные.

*Пример.* (2)

(3)

(4)

Или в операторном виде (5)

(6)

обозначение разностного оператора.

Введем норму сеточной функции.

(7)

*Определение.* Решение разностной задачи (5) сходится при к решению задачи (1), если (8),

где проекция функции на сетку (можно взять , самая простая).

*Определение.* Если при наличии сходимости имеет место

(9), то имеет место сходимость порядка *p*.

*Определение.* Говорят, что задача (5) аппроксимирует задачу (1) на ее решение *u*, если невязка (10), где

Если при этом имеет места оценка (11), то говорят, что разностная схема имеет порядок аппроксимации *p*.

Очевидно, что (6) имеет первый порядок аппроксимации.

*Определение.* Разностная схема (5) устойчива, если достаточно малых *h,* возмущенная разностная схема (12) однозначно разрешима и такая, что (13)

Другими словами, малое возмущение правой части разностной схемы приводит к равномерно малому по *h* возмущению решения.

Поскольку , то условие устойчивости (13) имеет вид:

(14)

означает непрерывность в

Теорема Лакса

Любая устойчивая разностная схема *p*-ого порядка, аппроксимируемая на решении, является схемой *p*-ого порядка сходимости.

♦ Полагая , получаем (15) в силу устойчивости (16)

в силу этого оценка (16) записывается в виде

. ■

**24. Простейшие разностные операторы**

На *[0, l]*  множество внутренних узлов. Построим разностную аппроксимацию , .

*Определение.* Множество узлов сетки, которое используется при построении , называется шаблоном.

погрешность аппроксимации оператора *L*.

Будем использовать разложение в ряд Тейлора.

левая разностная производная.

Таким образом, разностный оператор левой производной аппроксимирует с 1-ым порядком аппроксимации.

(2)

Если будем использовать трехточечный шаблон для аппроксимации, то

(3)

(4)

Погрешность аппроксимации оценивалась в отдельном узле сетки. Для оценки погрешности на всей сетке необходимо использовать сеточные нормы

(5)

В примерах 1-4 погрешности аппроксимации имеют один и тот же порядок в нормах (5)

В общем случае порядок аппроксимации может быть разным в разных нормах.

Обозначим

(6)

Рассмотрим случай *k=1*, тогда на равномерной сетке узлов:

(7)

Для вычисления интеграла в правой части можно использовать разложение квадр. формулы:

(8)

Использование квадр. формул с многими внутренними узлами приводит в компактным разностным операторам, например, если для (7) будем использовать Симпсона, получим:

(9)

В этом случае достигается более высокий порядок аппроксимации.

**25. Интегро-интерполяционный метод.**

Вывод основных ДУ мат. физики основан на записи соотв. законов сохранения для некоторых элементарных объемов и стягивание этих объемов к 0.

Разностные схемы, выражающие законы сохранения на сетке, называются консервативными, при этом законы сохранения на всей сетке являются алгебраическим следствием разностных уравнений.

Для построения консервативных разностных схем исходят из закона сохранения для отдельных ячеек сетки. Построим схему для одномерного стационарного уравнения диффузии:

-(k(x)∙u’(x))’=f(x) 0<x<l (1)

k(x)≥k1>0

-k(0)∙u’(0)+Gu(0)=g1 (2)

u(l)=g1 (3)

Введем обозначения: через g(x)=-k(x)∙u’(x) – поток тепла (4)

Xi+1/2

Xi-1/2

i+1

i

i-1

qi+1/2 - qi-1/2 =

Отражает закон сохранения количества тепла на контрольном объеме Xi-1/2≤X≤ Xi+1/2

Величина qi-1/2 – количество тепла, которое поступает в контрольный объем через сечение Xi-1/2

qi-1/2 – количество тепла, которое вытекает через сечение Xi+1/2

Дисбаланс этих потоков компенсируется распределением источников тепла (стоком). Выразим значение в полуцелых узлах через значения u в узлах сетки:

U’=-g(x)/k(x) (6)

Проинтегрируем (6) на отрезке Xi-1/2≤X≤ Xi+1/2 , получим:

ui-1/2 - ui = =

Через аi обозначим аi = тогда i

В формуле (8) аi имеет физический смысл: среднее тепловое сопротивление на отрезке Xi-1, Xi

Из (5) и (9) получаем разностное ур-е:

, где

Граничное условие первого рода задается точно yn=g2 (12)

Для апроксимации (2) будем интегрировать уравнение:

(9) → ; (2) →

**26. Разностные схемы повышенного порядка аппроксимации.**

Если коэфф. и решение исходного ДУ имеют достаточную гладкость, то можно строить разностные схемы повышенного порядка.

В качестве примера - одномерное уравнение диффузии

Lu=-u’’(x)=f(x) (1)

Первая возможность связана с использованием расширенного шаблона из 5 точек

Λu=

Λy=φ (3)

Самый простой выбор – φ=f

Повышенный порядок можно получить без использования дополнительных узлов сетки, за счёт использования компактных апроксимаций:

Центральная производная –

Где – 3-х точечная

Из (4,5) следует, что

Введем обозначения:

Оператор ∆, действующий на u в точке i:

При использовании формул (1),(8) где в правой части (8): ,

причем

Λy=

Рассмотрим способ повышения порядка апроксимации для решения исходного ДУ

Трехточечная схема: Λy=

r(x) нужно выбирать так, чтобы повысить порядок апроксимации

ψ=φ – Λu,

(12)

Если в (12) в качестве r(x) взять

ψ=

**27. Разностная схема для уравнения Пауссона**

Будем рассматривать задачу стационарной теплопроводности с заданным температурным режимом на границе.

LU = f(x), x ∈ Ω (1)

U(x)=g(x), x ∈  Ω (2)

Краевой задаче (1,2.3) поставлен в соотв. разностную схему Λy=(x), (4)

y(x)=g(x), x∈  Ω

Λy= , где y= -() (6)

(7)

Для достижения гладких k(x), u(x) разностная задача (4-6) имеет второй порядок аппроксимации.

Рассмотрим случай анизотропной среды, когда уравнение среды содержит смешанные произведения.

(8)

(9)

Представим

При

где

(12)

Погрешность (13)

(14)

Запишем разложение в ряд Тейлора

(15)

Пусть (16)

Аналогично (17)

(18)

Рассмотрим оператор

(19)

Из уравнения (1) находим

(20)

Если подставить (20) в (19), получим (21)

(22)

(23)

(24)

**28. Монотонные разностные схемы.**

Рассмотрим задачу

*Если a<0, решение (4) будет монотонным при условии h<, в противном случае решение имеет колебательный характер. Простейшая разностная схема, которая дает качественно верный результат, это противопоточная схема первого порядка*

*(5) =>*

*Таким образом схему (6) можно получить из (5), заменив на*

*Рассмотрим задачу с переменным коэффициентом.*

*Для задачи (7) построим схему с разностями против потока.*

*(9)*

*Схему (9) можно модернизировать, заменив коэффициент , тогда главный член погрешности будет уничтожен.*

*В свою очередь*

*Получаем схему второго порядка точности (12)*

*Конечноразностную схему (12)можно представить в виде трехточечного разностного ур-я.*

*(13)*

*Разностные схемы вида (13) будут монотонными, если они удовл. Принципу макс. Если в ур-ии (13) , причем выполняются условия*

*Доказательство: Пусть , решение . Пусть – наименьшее отрицательное значение, рассмотрим k-ое уравнение.*

*Левая часть <= 0, т.к. каждое слагаемое <=0, Противоречие.*

*Очевидно, что для схемы(13) принцип максимума выполняется.*

**29 Уравнение переноса, начально-периодическая задача, явная схема с левой разностной производной**.

Рассмотрим , 0 < t < T (1)

u(0, x) = g(x) , x – любое.

*Если функции g и f являются периодическими с общим периодом длина которого = 1, то решение исходной задачи (1) будет являться периодической функцией с тем же периодом.*

*Задачу (1) можно переформулировать:*

*(2)*

*Рассмотрим разностную схему с левой производной*

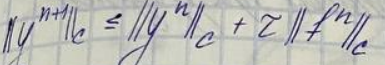
*- ) = , i = 1…N*

*Докажем устойчивость схемы в равной норме, предполагая a > 0,*

*Введем обозначение*

*Рассмотрим устойчивость:*

*Если*

**

*Для можно записать аналогичное нер-во, поэтому*

*Исследуем устойчивость схемы (2)*

*Для этого запишем соответствующее однородное разностное уравнение:*

*, k = 1…N (3)*

*Решение уравнения будем искать в виде:*

*(4)*

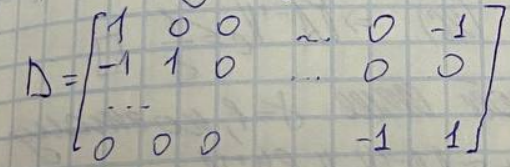
*Подставим (4) в (3) и найдем знак q:*

*Откуда следует, что 1 при*

**30 Уравнение переноса, начально-периодическая задача, неявная схема с левой разностной производной**.

*Докажем, что эта схема устойчива при a > 0 в равномерной норме:*

*, =*

**

*A = E + имеет положительные диагональные элементы и неположительные внедиагональные, строго диагональное преобладание по строкам:*

*A = E + ,*

*Так как ≤ ,*

*В нашей трехточечной схеме , поэтому*

**31. Уравнение переноса, начально-краевая задача, неявная схема с левой разностной производной**

Рассмотрим неяную схему с левой производной

*Дока*жем, что схема устойчива при a>0

(E + 6D)yn+1 =yn+

Изображение выглядит как текст, доска

Автоматически созданное описание

(1+

A=E+ имеет положительные диагональные элемены и неположительные внедиагональные, строго диагональное преобладание по строкам

*Изображение выглядит как текст, доска

Автоматически созданное описание*

A=E+

*Доказательство*

Рассмотрим систему Ax=f, где в fi>=0

Пусть

*Изображение выглядит как карта

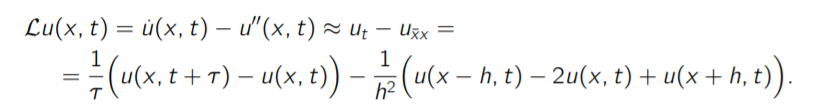
Автоматически созданное описание*

Очевидно что ,тогда берем A((24)

В формуле 24 вектор *с* с неотрицытельными координатами => (доказано)

**32 Уравнение теплопроводности, начально-периодическая задача, явная схема.**

Наиболее простая разностная схема получится, если использовать следующую аппроксимацию:



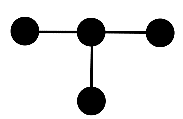
Изображение выглядит как текст

Автоматически созданное описание

Изображение выглядит как текст

Автоматически созданное описание

**33. Уравнение теплопроводности, начально-периодическая задача, неявная схема.**

**На нижнем уровне точка (j,i), На верхнем (слева) (j+1.i-1),(j+1,i),(j+1,i+1)

Порядок аппроксимации Док-м устойчивость в равном норме

Запишем в матричном виде

Матрица имеет полож диагон элем и отриц внешн элем, строгое диагонал преобладание по строкам с

Докажем в

**34. Уравнение теплопроводности с краевыми условиями Дирихле, шеститочечная схема**

(2)

, (3)

(4)

Эту схему называют

-методом или схемой с весами.

Найдем погрешность аппроксимации

(5)

Пусть , ,

(6)

(5), (6) (7)

Будем использовать разложение в ряд Тейлора:

*,*

(8)

Подставляем (8) в (7), получаем

(9)

Очевидно, что при (первая скобочка – исходное уравнение ),

Из (9), делая такую замену, получим (10)

Если , то получаем

Если (11), то

Исследуем устойчивость (2) при

(12)

После подстановки получаем:

(13)

(14)

должно быть , нужно проверить

Из (14) получаем (15)

-метод является безусловно устойчивым при

Если то метод будет устойчив при (из (15)) (16)

При

Если в качестве возьмем (эта величина

Следовательно, (16) – частный случай, выполн., метод является устойчивым.

Для уравнения теплопроводности при известно, что решение достигает экстр. значения либо на границе, либо на нулевом слое. Это свойство – принцип максимума. Можно потребовать, чтобы решение разностной задачи также удовлетворяло этому принципу.

*Теорема (принцип максимума для -метода)*

Пусть , Если решение разностной схемы имеет внутренний минимум или максимум, то оно постоянно.

♦Значит, это экстремальное значение должно быть во всех узлах сетки, включая граничные. ■

Пусть , где решение диффер. задачи в j-ой точке, решение, полученное по разностной схеме .

Запишем разностной уравнение для погрешности:

+ (18)

Поскольку коэфф. в (18) неотрицательны, то можем взять норму

(19)

(20)

Т.к. , то (21)

(22)

(23)